MARILENA POPA ROMULUS MILITARU

METODE NUMERICE

APLICAȚII

1. Metoda Gauss, cu pivotare parțială la fiecare etapă, pentru rezolvarea sistemelor de ecuații liniare

Prezentarea problemei

Se consideră sistemul liniar:

(1) $A \cdot x = t$, unde: $A \in R^{nxn}$ – matricea sistemului (1),
$t \in R^n$ – termenul liber al sistemului (1).

Ne propunem să determinăm, *dacă este posibil*, $x \in R^n$, x – soluția unică a sistemului (1).

Prezentarea metodei

Matricea extinsă, care caracterizează sistemul (1), o notăm $(A \mid t)$ şi elementele ei le notăm a_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n+1$, unde $a_{i,n+1} = t_i$, $1 \le i \le n$. *Metoda Gauss* constă în prelucrarea matricei $(A \mid t)$ astfel încât, într-un număr finit de etape (şi anume n-1), matricea A să fie *triangularizată superior*, adică să obținem matricea:

$$(2) \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(n)} & a_{1,n}^{(n)} & a_{1,n+1}^{(n)} \\ 0 & a_{22}^{(n)} & \cdots & a_{2,n-1}^{(n)} & a_{2,n}^{(n)} & a_{2,n+1}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1}^{(n)} & a_{n-1,n}^{(n)} & a_{n-1,n+1}^{(n)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n}^{(n)} & a_{n,n+1}^{(n)} \end{array}\right) \stackrel{not}{=} \left(A^{(n)} \mid t^{(n)}\right),$$

unde am notat $(A| \, t)$ cu $\left(A^{(1)} \mid t^{(1)}\right) = \left(a_{ij}^{(1)}\right)$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n+1$.

Observație. Matricea (2) caracterizează un sistem echivalent cu sistemul (1) (deci cu aceeaşi soluție).

Astfel, *presupunând* $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, $1 \le k \le n-1$, unde elementul $a_{kk}^{(k)}$ se numeşte pivot, pentru a obține, în final, matricea (2), se aplică formulele:

$$
(3)\ a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k)} & , \quad 1 \le i \le k, \quad i \le j \le n+1, \\ 0 & , \quad 1 \le j \le k, \quad j+1 \le i \le n, \\ a_{ij}^{(k)} - \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \cdot a_{kj}^{(k)}, & k+1 \le i \le n, \quad k+1 \le j \le n+1. \end{cases}
$$

Componentele soluției sistemului (1) se obțin *direct*, prin *substituție inversă*, pe baza formulelor:

$$
(4)\ \begin{cases} x_n = a_{n,n+1}^{(n)} / a_{nn}^{(n)},\ \text{dacă}\ a_{nn}^{(n)} \neq 0, \\ \text{pentru}\ i = n-1, n-2, \ldots, 1, \\ x_i = \left(a_{i,n+1}^{(n)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(n)} \cdot x_j \right) / a_{ii}^{(n)}. \end{cases}
$$

Dacă $(\exists) 1 \le k \le n-1$ astfel încât $a_{kk}^{(k)} = 0$, atunci pentru a putea aplica formulele (3) se recomandă o procedură de pivotare, de exemplu *pivotarea parțială*, care constă în:

- se caută în coloana k a pivotului, acel element $a_{i_k,k}^{(k)}$, $k \le i_k \le n$, care are proprietatea:

$$
(5)\ \left| a_{i_k,k}^{(k)} \right| = \max_{k \le i \le n} \left| a_{i,k}^{(k)} \right|.
$$

În legătură cu procedura de pivotare parțială se mai impun următoarele observații:

1) dacă $a_{i_k,k}^{(k)} = 0$, atunci sistemul (1) nu are soluție unică;
2) dacă $a_{i_k,k}^{(k)} \neq 0$, și $i_k \neq k$, atunci se permută (interschimbă) liniile k și i_k în matricea $\left(A^{(k)} \mid t^{(k)}\right)$ după care se continuă cu aplicarea formulelor (3) și, în final, (4).

Aplicații

1) Matricea extinsă asociată sistemului (1) este:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Procedura de pivotare parțială conduce la următoarele permutări de linii:

- la etapa 1: linia 1 $\leftrightarrow$ linia 2;
- la etapa 2: linia 2 $\leftrightarrow$ linia 3;
- la etapa 3: nu se efectuează permutări.

Se obține soluția: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Metoda Gauss, cu pivotare totală la fiecare etapă, pentru rezolvarea sistemelor de ecuații liniare (cu evaluarea determinantului matricei date inițial)

Prezentarea problemei

Se consideră sistemul liniar:

(1) $A \cdot x = t$, unde: $A \in R^{nxn}$ – matricea sistemului (1),
$t \in R^n$ – termenul liber al sistemului (1).

Ne propunem să determinăm, *dacă este posibil*, $x \in R^n$, x – soluția unică a sistemului (1).

Prezentarea metodei

Matricea extinsă, care caracterizează sistemul (1) o notăm $(A \mid t)$ şi elementele ei le notăm a_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n+1$, unde $a_{i,n+1} = t_i$, $1 \le i \le n$. *Metoda Gauss* constă în prelucrarea matricei $(A \mid t)$ astfel încât, înt-un număr finit de etape (şi anume n-1), matricea A să fie *triangularizată superior*, adică să obținem matricea:

$$(2)\quad \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(n)} & a_{1,n}^{(n)} & a_{1,n+1}^{(n)} \\ 0 & a_{22}^{(n)} & \cdots & a_{2,n-1}^{(n)} & a_{2,n}^{(n)} & a_{2,n+1}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1}^{(n)} & a_{n-1,n}^{(n)} & a_{n-1,n+1}^{(n)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n}^{(n)} & a_{n,n+1}^{(n)} \end{array}\right) \overset{not}{=} \left(A^{(n)} \mid t^{(n)}\right),$$

unde am notat $(A \mid t)$ cu $\left(A^{(1)} \mid t^{(1)}\right) = \left(a_{ij}^{(1)}\right)$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n+1$.

Observație. Matricea (2) caracterizează un sistem echivalent cu sistemul (1) (deci cu aceeaşi soluție).

Astfel, *presupunând* $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, $1 \le k \le n-1$, unde elementul $a_{kk}^{(k)}$ se numeşte pivot, pentru a obține, în final, matricea (2), se aplică formulele:

$$(3)\ a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k)} & , \quad 1 \le i \le k, \quad i \le j \le n+1, \\ 0 & , \quad 1 \le j \le k, \quad j+1 \le i \le n, \\ a_{ij}^{(k)} - \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \cdot a_{kj}^{(k)}, & k+1 \le i \le n, \quad k+1 \le j \le n+1. \end{cases}$$

Componentele soluției sistemului (1) se obțin *direct*, prin *substituție inversă*, pe baza formulelor:

$$(4)\ \begin{cases} x_n = a_{n,n+1}^{(n)} / a_{nn}^{(n)}, \text{ dacă } a_{nn}^{(n)} \ne 0, \\ \text{pentru } i = n-1, n-2, \ldots, 1, \\ x_i = \left(a_{i,n+1}^{(n)} - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(n)} \cdot x_j \right) / a_{ii}^{(n)}. \end{cases}$$

Observație. Valoarea determinantului matricei sistemului (1) este:

$$(5)\ \det(A) = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}^{(k)}.$$

Dacă $(\exists) 1 \le k \le n-1$ astfel încât $a_{kk}^{(k)} = 0$, atunci pentru a putea aplica formulele (3) se recomandă o procedură de pivotare, de exemplu *pivotarea totală*, care constă în:

- se caută acel element $a_{i_k, j_k}^{(k)}$, $k \le i_k \le n$, $k \le j_k \le n$ care are proprietatea:

$$6)\ \left| a_{i_k, j_k}^{(k)} \right| = \max_{\substack{k \le i \le n \\ k \le j \le n}} \left| a_{ij}^{(k)} \right|.$$

Aplicații

1. Matricea extinsă asociată sistemului (1) este:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

Procedura de pivotare totală, la fiecare etapă, conduce la următoarele permutări de linii şi / sau coloane:

- la etapa 1: $\boxed{\text{coloana 1} \leftrightarrow \text{coloana 3}}$;
- la etapa 2: linia 2 $\leftrightarrow$ linia 4,
  $\boxed{\text{coloana 2} \leftrightarrow \text{coloana 4}}$;
- la etapa 3: linia 3 $\leftrightarrow$ linia 4,
  $\boxed{\text{coloana 3} \leftrightarrow \text{coloana 4}}$.

Se obţine soluţia intermediară: $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi apoi

(permutând în ordine: componenta 3 $\leftrightarrow$ componenta 4,
componenta 2 $\leftrightarrow$ componenta 4,
componenta 1 $\leftrightarrow$ componenta 3),

se obţine soluţia: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Valoarea determinantului matricei sistemului dat iniţial este: -6.

3. Metoda Gauss, cu pivotare parțială la fiecare etapă, pentru inversarea matricelor

Prezentarea problemei

Se consideră matricea $A \in R^{nxn}$, adică:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; a_{ij} \in R.$$

Ne propunem să determinăm, *dacă este posibil*, A^{-1} (inversa matricei A).

Prezentarea metodei

Fie $I = (\delta_{ij})$, $1 \le i, j \le n$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } i = j \\ 0 \text{ dacă } i \ne j \end{cases}$, I - matricea unitate de ordin n; de asemenea considerăm $x^{(k)}$, $\delta^{(k)}$, $1 \le k \le n$, - coloanele matricei A^{-1}, respectiv ale lui I.

Atunci, egalitatea $A \cdot A^{-1} = I$ este echivalentă cu:

(1) $A \cdot x^{(k)} = \delta^{(k)}$, $1 \le k \le n$.

Observație. (1) reprezintă n sisteme de ecuații liniare, cu aceeaşi matrice a coeficienților, A.

Sistemele (1) pot fi rezolvate *simultan*, fiecare având soluția, o coloană a matricei A^{-1} şi termenul liber, coloana corespunzătoare a matricei I.

Matricea extinsă asociată formulelor (1) este $(A \mid I)$ şi elementele ei le notăm a_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le 2n$, unde

(2) $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } j = n + i \\ 0 \text{ dacă } j \ne n + i \end{cases}$, $1 \le i \le n$, $n + 1 \le j \le 2n$.

Metoda Gauss constă în prelucrarea matricei $(A \mid I)$ astfel încât, în n etape, să se obțină matricea extinsă $(I \mid A^{-1})$, adică:

$$(3)\quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,n+1}^{(n+1)} & a_{1,n+2}^{(n+1)} & \cdots & a_{1,2n}^{(n+1)} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,n+1}^{(n+1)} & a_{2,n+2}^{(n+1)} & \cdots & a_{2,2n}^{(n+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n,n+1}^{(n+1)} & a_{n,n+2}^{(n+1)} & \cdots & a_{2,2n}^{(n+1)} \end{array}\right)$$ unde am

notat cu $a_{ij}^{(1)}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le 2n$, elementele matricei $(A \mid I)$.

Astfel, presupunând $a_{kk}^{(k)} \ne 0$, $1 \le k \le n$, unde elementul $a_{kk}^{(k)}$ se numeşte pivot, pentru a obține matricea (3), se aplică formulele:

$$(4)\quad a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k)} / a_{kk}^{(k)} & , \ i = k, \quad k \le j \le 2n, \\ a_{ij}^{(k)} - a_{ik}^{(k)} \cdot \dfrac{a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, & 1 \le i \le n, \ i \ne k, \ k \le j \le 2n. \end{cases}$$

Dacă $(\exists) 1 \le k \le n$ pentru care $a_{kk}^{(k)} = 0$, atunci pentru a putea aplica formulele (4) se recomandă o procedură de pivotare, de exemplu *pivotarea parțială*, care constă în:

- se caută în coloana k a pivotului, acel element $a_{i_k,k}^{(k)}$, $k \le i_k \le n$, care are proprietatea:

$$(5)\quad \left|a_{i_k,k}^{(k)}\right| = \max_{k \le i \le n} \left|a_{i,k}^{(k)}\right|$$

Aplicație

Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Aplicând formulele (2) matricea inversă este:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}1(6) & 0{,}(3) & 1{,}(6) & -0{,}(6) \\ -0{,}1(6) & 0{,}(6) & 0{,}(3) & -0{,}(3) \\ -0{,}1(6) & -0{,}(3) & -0{,}(6) & 0{,}(6) \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Condensarea pivotală pentru calculul determinanților

Prezentarea problemei

Se consideră matricea $A \in R^{nxn}$ şi ne propunem să calculăm det(A).

Prezentarea metodei

Inițial, se aplică formula:

$$(1)\quad \det(A) = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \cdot \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{Vmatrix},$$

unde $a_{11} \neq 0$ şi în continuare se reia formula (1) pentru n – 1, n – 2, ... până când se calculează un determinant de ordinul 2.

Observații

3) dacă $a_{11} = 0$ şi $(\exists)\ 2 \leq i \leq n$ pentru care $a_{i1} \neq 0$, atunci se permută în A liniile 1 şi i, iar det (A) îşi schimbă semnul;

4) dacă $a_{11} = 0$ şi $(\forall)\ 2 \leq i \leq n$ avem $a_{i1} = 0$, atunci det (A) = 0.

Aplicații

1) Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

- pentru n = 4 (la prima parcurgere a ciclului repetitiv) avem: det = 16 şi

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 19 & 13 & 3 \\ 1 & 3 & 37 & 23 \\ 0 & 4 & 4 & 40 \end{pmatrix}, \ n = 3, \ A = \begin{pmatrix} 19 & 13 & 3 & 1 \\ 3 & 37 & 23 & 3 \\ 4 & 4 & 40 & 23 \\ 0 & 4 & 4 & 40 \end{pmatrix};$$

- pentru n = 3 avem: $\det = 16 \cdot 19 = 304$ şi

$$A = \begin{pmatrix} 19 & 13 & 3 & 1 \\ 3 & 664 & 428 & 3 \\ 4 & 24 & 748 & 23 \\ 0 & 4 & 4 & 40 \end{pmatrix}, \ n = 2, \ A = \begin{pmatrix} 664 & 428 & 3 & 1 \\ 24 & 748 & 428 & 3 \\ 4 & 24 & 748 & 23 \\ 0 & 4 & 4 & 40 \end{pmatrix};$$

- pentru n = 2 avem:

$$A = \begin{pmatrix} 664 & 428 & 3 & 1 \\ 24 & 486400 & 428 & 3 \\ 4 & 24 & 748 & 23 \\ 0 & 4 & 4 & 40 \end{pmatrix}, \ n = 1 \text{ şi respectiv}$$

$$A = \begin{pmatrix} 486400 & 428 & 3 & 1 \\ 24 & 486400 & 428 & 3 \\ 4 & 24 & 748 & 23 \\ 0 & 4 & 4 & 40 \end{pmatrix}.$$

Urmează $\det = 486400 / 304 = 1600$, deci $\det(A) = 1600$.

5. Factorizarea LR a matricelor aplicată la rezolvarea sistemelor de ecuații liniare

Prezentarea problemei

Se consideră sistemul liniar:

(1) $A \cdot x = t$, unde $A \in R^{nxn}$, $t \in R^n$, reprezintă matricea, respectiv termenul liber pentru sistemul (1).

Ne propunem să determinăm, dacă este posibil, soluția unică a sistemului (1), $x \in R^n$.

Prezentarea metodei

Definiție. O descompunere de forma:

(2) $A = L \cdot R$, unde

L – este o matrice inferior triunghiulară, adică

$l_{ij} = 0, \quad 2 \le j \le n, \quad 1 \le i \le j-1$ și

R – este o matrice superior triunghiulară, adică

$r_{ij} = 0, \quad 2 \le i \le n, \quad 1 \le j \le i-1$,

se numește factorizare LR a matricei A.

Elementele matricelor L și R, care realizează factorizarea LR a matricei A, se pot calcula direct din egalitatea (2).

Pentru a asigura unicitatea factorizării LR trebuie precizate elementele diagonale în matricea L (sau în matricea R). Astfel, dacă presupunem:

(3) $l_{kk} = 1, \quad 1 \le k \le n$,

atunci procedura de factorizare LR este cunoscută sub numele de *metoda Doolittle*.

Din (2) se obțin n^2 egalități:

(4) $$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik} \cdot r_{kj}, \quad 1 \le i,j \le n,$$

rezolvate succesiv în raport cu elementele r_{kj}, $k \le j$ și l_{ik}, $i > k$.

Astfel, ținând cont de (3), avem:

$$(5)\quad \begin{cases} r_{1j} = a_{1j}, & 1 \le j \le n, \\ l_{i1} = a_{i1} / r_{11}, & 2 \le i \le n, \\ r_{kj} = a_{kj} - \sum_{h=1}^{k-1} l_{kh} \cdot r_{hj}, & 2 \le k \le n,\ k \le j \le n \\ l_{ik} = \left(a_{ik} - \sum_{h=1}^{k-1} l_{ih} \cdot r_{hk} \right) / r_{kk}, & 2 \le k \le n, k+1 \le i \le n. \end{cases}$$

Aplicând metoda Doolittle (formulele (5)) matricei sistemului (1), atunci:

$A \cdot x = t \iff L \cdot R \cdot x = t$

Pentru determinarea soluției x se rezolvă succesiv sistemele:

$$(6)\quad \begin{cases} L \cdot y = t \\ R \cdot x = y \end{cases}$$

Sistemul inferior triunghiular $L \cdot y = t$ se rezolvă *direct* (prin *substituție directă*), obținând:

$$(7)\quad \begin{cases} y_1 = t_1, \\ 2 \le i \le n, \\ y_i = t_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot y_k \end{cases}$$

Sistemul superior triunghiular $R \cdot x = y$ se rezolvă *direct* (prin *substituție inversă*), obținând:

$$(8)\quad \begin{cases} x_n = y_n / r_{nn}, \\ i = n-1, n-2, \ldots, 1, \\ x_i = \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{n} r_{ik} \cdot x_k \right) / r_{ii} \end{cases}$$

Aplicații

1) Matricea extinsă (A | t) asociată sistemului (1) este:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -7 & -8 \end{array}\right)$$

Permutarea liniilor 1 şi 2 în matricea de mai sus, deoarece $a_{11} = 0$ şi $a_{21} \neq 0$ conduce la:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -7 & -8 \end{array}\right)$$

Apoi:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1/2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -7 & -8 \end{array}\right), \text{ pentru } k = 2,$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1/2 & -3/2 & -1/2 & 6 \\ 0 & 0 & 10/3 & -7 & -8 \end{array}\right), \text{ pentru } k = 3,$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1/2 & -3/2 & -1/2 & 6 \\ 0 & 0 & 10/3 & -16/3 & -8 \end{array}\right), \text{ pentru } k = 4.$$

In final obținem, **succesiv**, în ultima coloană a matricei:

$$\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ -4 \\ 16/3 \end{pmatrix}, \text{ respectiv } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$ care este soluția sistemului.

6. Factorizarea LR pentru matrice tridiagonale cu aplicare la rezolvarea sistemelor de ecuații liniare

Prezentarea problemei

Se consideră sistemul $A \cdot x = t$, $A \in R^{nxn}$ – tridiagonală (adică pe diagonala principală are elementele a_i, $1 \leq i \leq n$, deasupra diagonalei principale are elementele b_i, $1 \leq i \leq n-1$ şi sub diagonala principală are alementele c_i, $1 \leq i \leq n-1$, restul fiind nule) şi $t \in R^n$.

Ne propunem să determinăm $x \in R^n$ – soluția **unică** a sistemului liniar dat.

Prezentarea metodei

Factorizarea LR pentru rezolvarea sistemului dat

presupune două etape:

I. Descompunerea matricei A în produs de două matrice: $A = L \cdot R$, unde L este inferior triunghiulară şi R este superior tringhiulară având următoarele elemente:

în L
- pe diagonala principală toate cele n elemente sunt egale cu 1;
- sub diagonala principală se află elementele l_i, $1 \leq i \leq n-1$, ce trebuie determinate;
- restul elementelor sunt nule;

în R
- pe diagonala principală se află elementele r_i, $1 \leq i \leq n$, ce trebuie determinate;
- deasupra diagonalei principale se află elementele s_i, $1 \leq i \leq n-1$, ce trebuie determinate;
- restul elementelor sunt nule.

II. Rezolvarea succesivă a sistemelor liniare:

(1) $L \cdot y = t$

(2) $R \cdot x = y$

cu formule directe de calcul.

Astfel, parcurgerea etapei I, înseamnă formulele:

$$(3)\quad \begin{cases} r_1 = a_1, \\ 1 \le i \le n-1, \\ \quad s_i = b_i, \\ \quad l_i = \dfrac{c_i}{r_i}, \\ \quad r_{i+1} = a_{i+1} - l_i \cdot s_i, \end{cases}$$

iar parcurgerea etapei a II-a înseamnă:

$$(4)\quad \begin{cases} y_1 = t_1, \\ y_i = t_i - l_{i-1} \cdot y_{i-1},\ 2 \le i \le n, \end{cases}$$

respectiv

$$(5)\quad \begin{cases} x_n = \dfrac{y_n}{r_n}, \\ x_i = \dfrac{\left(y_i - s_i \cdot x_{i+1}\right)}{r_i},\ i = n-1, n-2, \ldots, 1. \end{cases}$$

Aplicație

Se dă sistemul liniar tridiagonal:

$$\begin{cases} -2x_1 + \dfrac{11}{10}x_2 = -\dfrac{1}{16} \\ \dfrac{11}{12}x_1 - 2x_2 + \dfrac{13}{12}x_3 = -\dfrac{1}{16} \\ \dfrac{13}{14}x_2 - 2x_3 = -\dfrac{1}{16} \end{cases}$$. Se obține soluția: $\begin{pmatrix} 447/4448 \\ 35/278 \\ 399/4448 \end{pmatrix} \approx$

$$\approx \begin{pmatrix} 0{,}10049460432 \\ 0{,}12589928058 \\ 0{,}08970323741 \end{pmatrix}, \text{ unde } \begin{array}{l} 1/16 = 0{,}0625 \\ 11/10 = 1{,}1 \\ 11/12 = 0.91(6) \\ 13/12 = 1.08(3) \\ 13/14 = 0.9(285714) \end{array}$$

7. Factorizarea LR pentru matrice pentadiagonale cu aplicare la rezolvarea sistemelor de ecuații liniare

Prezentarea problemei

Se consideră sistemul $A \cdot x = t$, $A \in R^{nxn}$ – pentadiagonală (adică
a_i, $1 \le i \le n$ – diagonala principală
b_i, $1 \le i \le n-1$ – prima supradiagonală
c_i, $1 \le i \le n-1$ – prima subdiagonală
d_i, $1 \le i \le n-2$ – a doua supradiagonală
e_i, $1 \le i \le n-2$ – a doua subdiagonală
în rest elementele nule) şi $t \in R^n$.

Ne propunem să determinăm $x \in R^n$ – soluția **unică** a sistemului liniar dat.

Prezentarea metodei

Factorizarea LR pentru rezolvarea sistemului dat presupune două etape:

I. Descompunerea $A = L \cdot R$, unde L – inferior triunghiulară şi R – superior triunghiulară cu următoarea configurație:

în L – n elemente egale cu 1 pe diagonala principală;
– l_i, $1 \le i \le n-1$ – prima subdiagonală;
– m_i, $1 \le i \le n-2$ – a doua subdiagonală;
(elemente ce trebuie determinate)
– restul elementelor nule;

în R – r_i, $1 \le i \le n$ – diagonala principală;
– s_i, $1 \le i \le n-1$ – prima supradiagonală;
– v_i, $1 \le i \le n-2$ – a doua supradiagonală;
(elemente ce trebuie determinate)
– restul elementelor nule;

II. Rezolvarea succesivă a sistemelor liniare:

(1) $L \cdot y = t$

(2) $R \cdot x = y$

cu formule directe de calcul.

Astfel, parcurgerea etapei I, înseamnă formulele:

$$(3)\quad \begin{cases} r_1 = a_1, s_1 = b_1, l_1 = c_1 / r_1, r_2 = a_2 - l_1 s_1, \\ 1 \le i \le n-2 \\ \quad v_i = d_i, m_i = e_i / r_i, \\ \quad s_{i+1} = b_{i+1} - l_i v_i, \\ \quad l_{i+1} = (c_{i+1} - m_i s_i)/ r_{i+1}, \\ \quad r_{i+2} = a_{i+2} - l_{i+1} s_{i+1} - m_i v_i. \end{cases}$$

iar, parcurgerea etapei a II-a, înseamnă:

$$(4)\ \begin{cases} y_1 = t_1, \\ y_2 = t_2 - l_1 y_1, \\ y_i = t_i - l_{i-1} y_{i-1} - m_{i-2} y_{i-2}, 3 \le i \le n \end{cases}$$

respectiv

$$(5)\ \begin{cases} x_n = y_n / r_n, \\ x_{n-1} = (y_{n-1} - s_{n-1} x_n)/ r_{n-1}, \\ x_i = (y_i - s_i x_{i+1} - v_i x_{i+2})/ r_i,\ i = n-2, n-3, \ldots, 1. \end{cases}$$

Aplicație

Se dă sistemul liniar pentadiagonal:

$$1)\quad \begin{cases} -16x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -12 \\ -x_1 + 8x_2 + x_3 - 8x_4 = -7 \\ 8x_2 - 16x_3 + x_4 = 54 \end{cases}. \text{ Se obține: } \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1,5 \\ -2,5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

8. Metoda Jacobi pentru rezolvarea iterativă a sistemelor de ecuații liniare

Prezentarea problemei

Fie sistemul liniar (cu soluție unică):

(1) $A \cdot x = t$, $A \in R^{nxn}$ – matricea sistemului;

$t \in R^n$ – termenul liber al sistemului.

Ne propunem să determinăm soluția unică $x \in R^n$.

Prezentarea metodei

Pentru $x^{(0)} \in R^n$ – aproximația inițială a soluției sistemului (1), ales arbitrar (de exemplu vectorul nul), calculăm:

(2) $$x_i^{(k+1)} = \left(t_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii}, \quad 1 \le i \le n, k \ge 0$$

până când este îndeplinită condiția:

(3) $$\max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \le \varepsilon, \text{ unde}$$

ε - precizia cu care dorim să obținem soluția ($\varepsilon = 10^{-p}$, $p \ge 4$).
Atunci $x \cong x^{(k+1)}$.

O condiție suficientă pentru obținerea soluției sistemului (1), cu precizia ε, este:

(4) $$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \; 1 \le i \le n$$ (matricea A este dominant diagonală pe linii) sau

(4') $$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|, \; 1 \le j \le n$$ (matricea A este dominant diagonală pe coloane).

Aplicații

1) Se dau: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ şi $t = \begin{pmatrix} -30 \\ -132 \\ -132 \\ -30 \end{pmatrix}$.

Pentru:

$\varepsilon = 10^{-4} \Rightarrow$ it = 20 şi $x = \begin{pmatrix} -1{,}9999828339 \\ -25{,}999982834 \\ -25{,}999982834 \\ -1{,}9999828339 \end{pmatrix}$;

$\varepsilon = 10^{-7} \Rightarrow$ it = 30 şi $x = \begin{pmatrix} -1{,}9999999832 \\ -25{,}999999983 \\ -25{,}999999983 \\ -1{,}9999999832 \end{pmatrix}$;

$\varepsilon = 10^{-10} \Rightarrow$ it = 40 şi $x = \begin{pmatrix} -2{,}0000000000 \\ -26{,}000000000 \\ -26{,}000000000 \\ -2{,}0000000000 \end{pmatrix}$,

care este soluția exactă a sistemului liniar $A \cdot x = t$.

9. Metoda Seidel – Gauss pentru rezolvarea iterativă a sistemelor de ecuații liniare

Prezentarea problemei

Fie sistemul liniar (cu soluție unică):

(1) $A \cdot x = t$, $A \in R^{nxn}$ – matricea sistemului;

$t \in R^n$ – termenul liber al sistemului.

Ne propunem să determinăm soluția unică $x \in R^n$.

Prezentarea metodei

Pentru $x^{(0)} \in R^n$ – aproximația inițială a soluției sistemului (1), ales arbitrar (practic, vectorul nul), calculăm:

(2) $$x_i^{(k+1)} = \left(t_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii}, \ 1 \le i \le n, \ k \ge 0,$$

până când este îndeplinită condiția:

(3) $$\max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \le \varepsilon, \text{ unde}$$

ε – precizia cu care dorim să obținem soluția ($\varepsilon = 10^{-p}$, $p \ge 4$). Atunci $x \cong x^{(k+1)}$.

O condiție suficientă pentru obținerea soluției sistemului (1), cu precizia ε, este:

(4) $$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}|, \ 1 \le i \le n$$ (matricea A este dominant diagonală pe linii) sau

(4') $$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n} |a_{ij}|, \ 1 \le j \le n$$ (matricea A este dominant diagonală pe coloane).

Aplicații

1) Se dau: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $t = \begin{pmatrix} -30 \\ -132 \\ -132 \\ -30 \end{pmatrix}$.

Pentru:

$\varepsilon = 10^{-4} \Rightarrow$ it = 10 și $x = \begin{pmatrix} -1,9999885557 \\ -26,000005722 \\ -25,999997139 \\ -2,0000014305 \end{pmatrix}$;

$\varepsilon = 10^{-7} \Rightarrow$ it = 15 și $x = \begin{pmatrix} -1,9999999888 \\ -26,000000006 \\ -25,999999997 \\ -2,0000000014 \end{pmatrix}$;

$\varepsilon = 10^{-10} \Rightarrow$ it = 20 și $x = \begin{pmatrix} -2,0000000000 \\ -26,000000000 \\ -26,000000000 \\ -2,0000000000 \end{pmatrix}$,

care este soluția exactă a sistemului $A \cdot x = t$.

10. Metoda Seidel – Gauss pentru rezolvarea iterativă a sistemelor liniare cu matrice slab populate

Prezentarea problemei

În rezolvarea unor astfel de sisteme se folosesc metode iterative, în principiu aceleaşi ca şi pentru sisteme liniare cu matrice "pline", diferențele apărând în modul în care relațiile generale de iterație se transformă într-un algoritm de calcul care utilizează la maxim memoria calculatorului, evitând în acelaşi timp operațiile de înmulțire şi adunare cu zero.

Prezentarea metodei

Metoda Seidel – Gauss pentru rezolvarea sistemului:

$A \cdot x = t$, $A \in R^{nxn}$ – este matrice slab populată, se bazează pe relațiile :

$x^{(0)} = 0 \in R^n$,

(1) $$x_i^{(k+1)} = \left(t_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii}, \ 1 \le i \le n, \ k \ge 0,$$

până când:

(2) $$\max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \le \varepsilon, \ \varepsilon \text{ precizia impusă.}$$

Precizare. În algoritmul de calcul, pentru matricea sistemului se prevede un număr de locații de memorie egal cu numărul elementelor nenule din matrice. Aceste elemente nenule trebuie identificate şi de aceea vom lucra cu următorii vectori (precizând că n reprezintă numărul de ecuații şi necunoscute, iar nn – numărul de elemente nenule din matrice):

1) $A = (a_i)$, $1 \le i \le nn$ - conține elementele nenule din matricea sistemului.

2) $L = (l_i)$, $1 \le i \le n$ – conține numărul elementelor nenule din fiecare linie.

3) $C = (c_i)$, $1 \le i \le nn$ – conține indicii coloanelor în care sunt elementele nenule din fiecare linie, parcurgând liniile în ordinea lor crescătoare.

Observației. Cum $1 \le c_i \le n \Rightarrow c_i \in Z$.

Precizare. Cu ajutorul vectorilor L şi C se stabilesc, fară testări, termenii care intră în formulele (1).

4) $T = (t_i)$, $1 \le i \le n$ – conține termenul liber

5) $X = (x_i)$ $1 \le i \le n$ – conține, inițial $x^{(0)}$ din (1).

6) $\varepsilon \in R$, reprezintă precizia.

7) itmax $\in Z$, – reprezintă numărul maxim de iterații pentru a obține soluția sistemului cu precizia dorită.

Aplicație

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + x_4 = -87{,}5 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_5 = -25 \\ x_2 - 4x_3 + x_6 = -12{,}5 \\ x_1 - 4x_4 + x_5 + x_7 = -50 \\ x_2 + x_4 - 4x_5 + x_6 + x_8 = 0 \\ x_3 + x_5 - 4x_6 + x_9 = 0 \\ x_4 - 4x_7 + x_8 + x_{10} = -50 \\ x_5 + x_7 - 4x_8 + x_9 + x_{11} = 0 \\ x_6 + x_8 - 4x_9 + x_{12} = 0 \\ 2x_7 - 4x_{10} + x_{11} = -50 \\ 2x_8 + x_{10} - 4x_{11} + x_{12} = 0 \\ 2x_9 + x_{11} - 4x_{12} = 0 \end{cases}$$

Avem: $n = 12$ şi $nn = 46$. Apoi:

$a_1 = -4$; $a_2 = 1$; $a_3 = 1$; (în linia 1)

$a_4 = 1$; $a_5 = -4$; $a_6 = 1$; $a_7 = 1$; (în linia 2)

$a_8 = 1$; $a_9 = -4$; $a_{10} = 1$; (în linia 3)
$a_{11} = 1$; $a_{12} = -4$; $a_{13} = 1$; $a_{14} = 1$; (în linia 4)
$a_{15} = 1$; $a_{16} = 1$; $a_{17} = -4$; $a_{18} = 1$; $a_{19} = 1$; (în linia 5)
$a_{20} = 1$; $a_{21} = 1$; $a_{22} = -4$; $a_{23} = 1$; (în linia 6)
$a_{24} = 1$; $a_{25} = -4$; $a_{26} = 1$; $a_{27} = 1$; (în linia 7)
$a_{28} = 1$; $a_{29} = 1$; $a_{30} = -4$; $a_{31} = 1$; $a_{32} = 1$ (în linia 8)
$a_{33} = 1$; $a_{34} = 1$; $a_{35} = -4$; $a_{36} = 1$ (în linia 9)
$a_{37} = 2$; $a_{38} = -4$; $a_{39} = 1$; (în linia 10)
$a_{40} = 2$; $a_{41} = 1$; $a_{42} = -4$; $a_{43} = 1$; (în linia 11)
$a_{44} = 2$; $a_{45} = 1$; $a_{46} = -4$; (în linia 12)
$l_1 = 3$; $l_2 = 4$; $l_3 = 3$; $l_4 = 4$, $l_5 = 5$; $l_6 = 4$; $l_7 = 4$; $l_8 = 5$;
$l_9 = 4$; $l_{10} = 3$; $l_{11} = 4$; $l_{12} = 3$;
$c_1 = 1$; $c_2 = 2$; $c_3 = 4$; (în prima linie)
$c_4 = 1$; $c_5 = 2$; $c_6 = 3$; $c_7 = 5$; (în a doua linie)
$c_8 = 2$; $c_9 = 3$; $c_{10} = 6$; (în a treia linie)
$c_{11} = 1$; $c_{12} = 4$; $c_{13} = 5$; $c_{14} = 7$ (în a patra linie)
$c_{15} = 2$; $c_{16} = 4$; $c_{17} = 5$; $c_{18} = 6$; $c_{19} = 8$; (în a cincea linie)
$c_{20} = 3$; $c_{21} = 5$; $c_{22} = 6$; $c_{23} = 9$ (în a şasea linie)
$c_{24} = 4$; $c_{25} = 7$; $c_{26} = 8$; $c_{27} = 10$; (în a şaptea linie)
$c_{28} = 5$; $c_{29} = 7$; $c_{30} = 8$; $c_{31} = 9$; $c_{32} = 11$; (în a opta linie)
$c_{33} = 6$; $c_{34} = 8$; $c_{35} = 9$; $c_{36} = 12$; (în a noua linie)
$c_{37} = 7$; $c_{38} = 10$; $c_{39} = 11$; (în a zecea linie)
$c_{40} = 8$; $c_{41} = 10$; $c_{42} = 11$; $c_{43} = 12$; (în a unsprezecea linie)
$c_{44} = 9$; $c_{45} = 11$; $c_{46} = 12$; (în a douăsprezecea linie)

$t_1 = -87{,}5$; $t_2 = -25$; $t_3 = -12{,}5$; $t_4 = -50$; $t_5 = 0$; $t_6 = 0$; $t_7 = -50$;
$t_8 = 0$; $t_9 = 0$; $t_{10} = -50$; $t_{11} = 0$; $t_{12} = 0$;
$x_i = 0$; $1 \le i \le 12$.

Pentru:

$$\varepsilon = 10^{-4} \Rightarrow \text{ it} = 30 \text{ şi } x = \begin{pmatrix} 37{,}499925226 \\ 24{,}999913764 \\ 12{,}499950273 \\ 37{,}499887327 \\ 24{,}999870057 \\ 12{,}499925069 \\ 37{,}499879948 \\ 24{,}999861546 \\ 12{,}499920162 \\ 37{,}499894032 \\ 24{,}999877789 \\ 12{,}499929528 \end{pmatrix};$$

11. Metoda Leverrier pentru determinarea coeficienților polinomului caracteristic

Prezentarea problemei

Fie $A \in R^{nxn}$.

Ne propunem să determinăm coeficienții polinomului caracteristic.

(1) $p_A(\lambda) = \lambda^n - \sigma_1\lambda^{n-1} + \sigma_2\lambda^{n-2} + ... + \quad + (-1)^n\sigma_n$

Prezentarea metodei

Coeficienții care apar în (1) se obțin din relațiile:

$$(2)\begin{cases} \sigma_1 = s_1, \\ 2 \le k \le n, \\ \sigma_k = \dfrac{1}{k}(s_1\sigma_{k-1} - s_2\sigma_{k-2} + ... + (-1)^k s_{k-1}\sigma_1 + (-1)^{k+1} s_k), \text{unde} \end{cases}$$

(3) $s_k = Tr(A^k)$, $1 \le k \le n$.

Aplicație

Se dă $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -1 & 4 & -11 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Se obțin: $s_1 = 0 \Rightarrow \sigma_1 = s_1 = 0$; $s_2 = 14 \Rightarrow \sigma_2 = (s_1\sigma_1 - s_2)/2 = -7$; $s_3 = 18 \Rightarrow \sigma_3 = (s_1\sigma_2 - s_2\sigma_1 + s_3)/3 = 6$.

$\Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^3 - \sigma_1\lambda^2 + \sigma_2\lambda - \sigma_3 = \lambda^3 - 7\lambda - 6$.

12. Metoda Krylov pentru determinarea coeficienților polinomului caracteristic

Prezentarea problemei

Fie matricea $A \in R^{nxn}$.

Ne propunem să determinăm coeficienții polinomului caracteristic.

(1) $p_A(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + ... + c_{n-1}\lambda + c_n$

Prezentarea metodei

1) Se alege *arbitrar*, $y^{(0)} \in R^n$, *nenul*

2) Se obțin: (2) $y^{(k)} = A \cdot y^{(k-1)}$, $1 \le k \le n$.

3) Se rezolvă sistemul liniar:

$$(3)\ (y^{(n-1)}\ y^{(n-2)}\ ...\ y^{(1)}\ y^{(0)}) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = -\,y^{(n)}$$

– Dacă nu are soluție unică, se alege alt $y^{(0)}$ şi se reia de la 2).

– Dacă are soluție unică, aceasta reprezintă coeficienții polinomului caracteristic pentru matricea dată, deci (1).

Observații:

1. Notăm cu B matricea sistemului (3). Ultima coloană a lui B se introduce şi calculăm apoi fiecare coloană din B, în funcție de succesoarea ei, folosind (2).

2. Dacă mai ataşăm o coloană în plus la matricea B, pentru termenul liber al sistemului (3), aceasta se va calcula, folosind (2), cu elementele din prima coloană a matricei.

3. Pentru rezolvarea sistemului (3), apelăm o procedură (de exemplu Gauss).

Aplicație

Se dă: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Obținem: coeficienții polinomului caracteristic al matricei date, sunt: –6 10 –1 –6.

Precizări: 1) Se obține $p_A(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 10\lambda^2 - \lambda - 6$, pentru alegerea $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 2) Dacă alegem $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, atunci sistemul liniar de forma (3), care se obține (înainte de pasul 5. al algoritmului):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 12 & 6 & 4 & 1 & -22 \\ 24 & 10 & 4 & 1 & -54 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & -16 \end{array}\right)$$

nu are soluție unică (este compatibil nedeterminat).

13. Metoda Fadeev pentru determinarea coeficienților polinomului caracteristic

Prezentarea problemei

Fie $A \in R^{nxn}$. Ne propunem să determinăm coeficienții polinomului caracteristic.

(1) $p_A(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + ... + c_{n-1}\lambda + c_n$

Prezentarea metodei

1) $A_1 = A$; $c_1 = -Tr(A_1)$; $B_1 = c_1 I + A_1$;
2) $A_2 = A \cdot B_1$; $c_2 = -Tr(A_2)/2$; $B_2 = c_2 I + A_2$;
....
n) $A_n = A \cdot B_{n-1}$; $c_n = -Tr(A_n)/n$; $B_n = c_n I + A_n$.

Observații:

1. $B_n = \mathbf{O}_n$ (matrice nulă) – deci nu se va calcula.
2. Dacă $c_n \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{c_n} \cdot B_{n-1}$.

Aplicație

1) Se dă: $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Se obține: $A_1 = A$; $c_1 = -2$; $B_1 = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$A_2 = A \cdot B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 12 & -6 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$; $c_2 = -5$; $B_2 = \begin{pmatrix} -3 & 12 & -6 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$;

$$A_3 = A \cdot B_2 = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix};\ c_3 = 6;\ B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6.$

Cum $c_3 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{6} B_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & -2 & 1 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/6 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}.$

14. Metoda Danilevski pentru aducerea unei matrice la forma normală Frobenius

Prezentarea problemei

Fie matricea: $A \in R^{nxn}$ şi ne propunem să transformăm, prin procedee de asemănare, această matrice în forma normală Frobenius:

$$(1)\quad \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} & f_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obținem:

$$(2)\quad p_A(\lambda) = \lambda^n - f_1\lambda^{n-1} - f_2\lambda^{n-2} - \ldots - f_{n-1}\lambda - f_n.$$

Prezentarea metodei

Se transformă matricea A în forma (1) după n–1 etape, la fiecare etapă obținând câte o linie din (1), *de la ultima linie până la prima linie*.

Astfel, la etapa 1, presupunem $a_{n,n-1} \neq 0$ pentru a obține ultima linie din (1). Cu această presupunere, vom prelucra matricea A pe baza relațiilor:

$$(3)\quad \begin{cases} a'_{i,n-1} = a_{i,n-1} / a_{n,n-1}, 1 \le i \le n, \\ a'_{ij} = a_{ij} - a'_{i,n-1} \cdot a_{nj}, 1 \le i \le n, 1 \le j \le n, j \neq n-1, \end{cases}$$

urmate de relațiile:

$$(4)\quad a'_{n-1,j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} \cdot a'_{ij}, 1 \le j \le n.$$

Apoi, la etapa 2, presupunem $a'_{n-1,n-2} \neq 0$ pentru a obține penultima linie din (1) (ultima linie s-a obținut deja la

etapa 1). Cu această presupunere, vom prelucra matricea A obținută după parcurgerea etapei 1, adică după aplicarea relațiilor (3) şi
(4), pe baza unor relații asemănătoare, adică:

$$(3')\qquad \begin{cases} a''_{i,n-2} = a'_{i,n-2} / a'_{n-1,n-2}, 1 \le i \le n-1, \\ a''_{ij} = a'_{ij} - a''_{i,n-2} \cdot a'_{n-1,j}, 1 \le i \le n-1, 1 \le j \le n, j \ne n-2, \end{cases}$$

urmate de relațiile:

$$(4')\qquad a''_{n-2,j} = \sum_{i=1}^{n} a'_{n-1,i} \cdot a''_{ij}, 1 \le j \le n.$$

În concluzie, notând cu k variabila ce numără etapele în metoda Danilevski, avem: k = n, n–1, …, 2 şi $a_{k,k-1} \ne 0$.

Observație. Dacă există k = n, n–1, ..., 2, astfel încât $a_{k,k-1} = 0$, atunci suntem într-un caz particular.

Aplicație

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

coeficienții polinomului caracteristic sunt: 0, -6, 7, -6.

Detalii calcule:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \text{aux} = (1\ 1\ 3\ {-1})$$

$$A \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2/3 & -1/3 & 1/3 & -5/3 \\ -1/3 & 5/3 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2/3 & -1/3 & 1/3 & -5/3 \\ -1/3 & 14/3 & 1/3 & 13/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

aux = (-1/3 14/3 1/3 13/3)

$$A \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 9/14 & -1/14 & 5/14 & -19/14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

aux = (3 0 6 -7)

$$A \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 6 & -7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^2 + 7\lambda - 6.$

15. Metoda Danilevski pentru determinarea unui vector propriu corespunzător unei valori proprii

Prezentarea problemei

Fie matricea: $A \in R^{nxn}$ şi ne propunem determinarea unui vector propriu al matricei pentru o valoare proprie specificată.

Prezentarea metodei

Se transformă matricea A în forma normală Frobenius:

$$(1) \quad \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} & f_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

folosind relațiile (3), (4), (3'), (4') din lucrarea precedentă.

Notând cu k, variabila ce numără etapele de transformare a lui A în (1), avem: k = n, n-1, ..., 2 şi $a_{k,k-1} \neq 0$.

Observație. Dacă există k = n, n-1, ..., 2 astfel încât $a_{k,k-1} = 0$, atunci suntem într-un caz particular (care nu se tratează în algoritmul care urmează).

Cum matricea A şi forma sa normală Frobenius sunt matrice asemenea, *teoretic*, la fiecare etapă k, obținem o matrice M_{k-1} care diferă de matricea unitate doar în linia k-1, linie care are următoarea componență:

$$(2) \quad -\frac{a_{k1}}{a_{k,k-1}} \quad -\frac{a_{k2}}{a_{k,k-1}} \ldots -\frac{a_{k,k-2}}{a_{k,k-1}} \quad \frac{1}{a_{k,k-1}} \quad -\frac{a_{kk}}{a_{k,k-1}} \ldots -\frac{a_{kn}}{a_{k,k-1}}$$

Practic, la fiecare etapă k, obținem linia k-1 dintr-o matrice $M \in R^{n-1 \times n}$, folosind (2).

În acest mod, după parcurgerea celor n-1 etape matricea (1) se poate scrie, *teoretic*

$$M_1^{-1} \cdot M_2^{-1} \cdot \ldots \cdot M_{n-2}^{-1} \cdot M_{n-1}^{-1} \cdot A \cdot M_{n-1} \cdot M_{n-2} \cdot \ldots \cdot M_2 \cdot M_1$$

Ştiind că $y \in R^n$ este un vector propriu corespunzător unei valori proprii λ, pentru matricea (1), avem $x \in R^n$ este un vector propriu corespunzător aceleeaşi valori proprii λ, pentru matricea iniţială A, calculat *teoretic* astfel:

(3) $$x = M_{n-1} \cdot M_{n-2} \cdot \ldots \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot y$$

Observaţie. Produsele din (3) se fac de la dreapta la stânga, adică:

$$x = M_{n-1}(M_{n-2}(\ldots(M_2(M_1 \cdot y))\ldots))$$

Aceasta deoarece, produsul $M_i \cdot y$, modifică componenta i din vectorul y.

Aplicaţie

Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^2 + 7\lambda - 6.$

Din $p_A(\lambda) = 0 \Rightarrow (\lambda+3)(\lambda-2)(\lambda^2-\lambda+1) = 0$, deci $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_{3,4} \in \mathbf{C}\left(\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Pentru $\lambda_1 = -3 \Rightarrow y^{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda_1^3 \\ \lambda_1^2 \\ \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ 9 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$;

pentru $\lambda_2 = 2 \Rightarrow y^{(2)} = \begin{pmatrix} \lambda_2^3 \\ \lambda_2^2 \\ \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De asemenea: $M = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -2 & 7/3 \\ 1/14 & 3/14 & -1/14 & -13/14 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$,

Obtinem:

$$y^{(1)} \to \begin{pmatrix} -\mathbf{2/3} \\ 9 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2/3 \\ \mathbf{7/6} \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2/3 \\ 7/6 \\ -\mathbf{5/6} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.(6) \\ 1.1(6) \\ -0.8(3) \\ 1 \end{pmatrix},$$

respectiv

$$y^{(2)} \to \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathbf{1/7} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ -1/7 \\ \mathbf{5/7} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.(142857) \\ 0.(714285) \\ 1 \end{pmatrix}$$

16. Metoda Bairstow pentru rezolvarea ecuațiilor algebrice

Prezentarea problemei

Se consideră polinomul cu coeficienți reali:

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$,

şi ne propunem determinarea rădăcinilor acestui polinom.

Prezentarea metodei

Metoda Bairstow constă în descompunerea lui P_n în factori pătratici (dacă n = par) sau în factori pătratici şi un factor liniar (dacă n = impar).

Notăm primul factor pătratic cu $x^2 + px + q$ $\Rightarrow$

$$(*) \quad P_n(x) = (x^2 + px + q)(b_0x^{n-2} + b_1x^{n-3} + ... + b_{n-2}) + \underbrace{rx + s}_{\text{restul}}.$$

Notăm $\begin{array}{l} r = b_{n-1} \\ s = b_n + pb_{n-1} \end{array}$, deoarece făcând produsele în dreapta şi egalând cu membrul stâng, avem:

$$(1) \begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 = a_1 - pb_0 \\ b_k = a_k - pb_{k-1} - qb_{k-2}, \ 2 \le k \le n \end{cases}$$

Evident $\begin{cases} r = f_1(p,q) \\ s = f_2(p,q) \end{cases}$, (din (1))

Vom determina p şi q astfel încât, restul împărțirii (*) să fie aproximativ nul, adică:

$$(2) \begin{cases} f_1(p,q) = 0 \\ f_2(p,q) = 0 \end{cases} \qquad \text{sistem neliniar}$$

Rezolvăm sistemul (2) cu metoda Newton.

Dacă $p_0, q_0 \in R$ sunt aproximațiile inițiale ale lui p şi q atunci:

(3) $$\begin{pmatrix} p_{k+1} \\ q_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p}(p_k, q_k) & \frac{\partial f_1}{\partial q}(p_k, q_k) \\ \frac{\partial f_2}{\partial p}(p_k, q_k) & \frac{\partial f_2}{\partial q}(p_k, q_k) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1(p_k, q_k) \\ f_2(p_k, q_k) \end{pmatrix}, \ k \geq 0$$

Notăm: (4) $$\begin{cases} \Delta = \frac{\partial f_1}{\partial p} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial q} - \frac{\partial f_1}{\partial q} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial p} \\ R = f_1 \frac{\partial f_2}{\partial q} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial q} \\ S = -f_1 \frac{\partial f_2}{\partial p} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial p} \end{cases}$$. Atunci, din (3) avem:

(3') $$\begin{cases} p_{k+1} = p_k - R_k / \Delta_k \\ q_{k+1} = q_k - S_k / \Delta_k \end{cases}, \ k \geq 0$$

unde prin Δ_k, R_k, S_k am notat valorile funcțiilor Δ, R şi respectiv S în (p_k, q_k).

Ținând cont de (1) şi calculând derivatele parțiale care apar în (4), obținem:

(5) $$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial p} = \frac{\partial b_{n-1}}{\partial p} \\ \frac{\partial f_1}{\partial q} = \frac{\partial b_{n-1}}{\partial q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p} = \frac{\partial b_n}{\partial p} + b_{n-1} + p\frac{\partial b_{n-1}}{\partial p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} = \frac{\partial b_n}{\partial q} + p\frac{\partial b_{n-1}}{\partial q} \end{cases}$$

Notăm (6) $c_k = -\frac{\partial b_{k+1}}{\partial p}$; (1) $\Rightarrow \frac{\partial b_{k+1}}{\partial p} = -b_k - p\frac{\partial b_k}{\partial p} - q\frac{\partial b_{k-1}}{\partial p}$.

Deci $c_k = b_k - pc_{k-1} - qc_{k-2}$, $0 \leq k \leq n - 1$, unde $c_{-1} = c_{-2} = 0$.

Analog, notăm (7) $d_k = -\frac{\partial b_{k+2}}{\partial q}$;

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial b_{k+2}}{\partial q} = -p\frac{\partial b_{k+1}}{\partial q} - b_k - q\frac{\partial b_k}{\partial q}.$$

Deci $d_k = b_k - pd_{k-1} - qd_{k-2}$, $0 \le k \le n-2$, unde $d_{-1} = d_{-2} = 0$.

În concluzie, obținem $c_k = d_k$, $0 \le k \le n-2$ sau

$$(8)\ \begin{cases} c_0 = b_0 \\ c_1 = b_1 - pb_0 \\ c_k = b_k - pc_{k-1} - qc_{k-2},\ 2 \le k \le n-1 \end{cases}$$

Înlocuind (6), respectiv (7) în (5) avem:

$$\frac{\partial f_1}{\partial p} = -c_{n-2};\quad \frac{\partial f_1}{\partial q} = -c_{n-3};$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial p} = -c_{n-1} + b_{n-1} - pc_{n-2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial q} = -c_{n-2} - pc_{n-3}$$

de unde, înlocuind în (4), avem:

$$(4')\ \begin{cases} \Delta = c_{n-2}^2 - c_{n-1}c_{n-3} + b_{n-1}c_{n-3} \\ R = b_n c_{n-3} - b_{n-1}c_{n-2} \\ S = b_{n-1}c_{n-1} - b_{n-1}^2 - b_n c_{n-2} \end{cases}$$

Astfel, pentru a determina **un factor pătratic** procedăm astfel:

– alegem aproximările inițiale p_0, q_0
– determinăm $b_0, b_1, ..., b_n$ cu formulele (1)
– determinăm $c_0, c_1, ..., c_{n-1}$ cu formulele (8)
– determinăm Δ, R, S cu formulele (4')
– determinăm p_{k+1}, q_{k+1} cu formulele (3')

Ne oprim atunci când p_{k+1}, q_{k+1} verifică suficient de bine ecuațiile sistemului (2), adică $\max\{|r|, |s|\} \le \varepsilon$, unde $r = b_{n-1}$ și $s = b_n + p_{k+1}b_{n-1}$.

Un alt test de oprire, din (3'), $\max\{|p_{k+1}-p_k|,|q_{k+1}-q_k|\}\le \varepsilon$ adică $\left|\dfrac{R+S}{\Delta}\right|\le \varepsilon$.

Când testul de oprire este îndeplinit, ultimele valori calculate p_{k+1}, q_{k+1} reprezintă aproximații suficient de bune (în funcție de ε) pentru coeficienții trinomului $x^2 + px + q$, iar soluțiile acestui trinom sunt 2 rădăcini reale sau complexe ale ecuației (*).

Continuăm aceeaşi tactică cu polinomul de grad n-2 care apare în dreapta relației (*).

Aplicații

1) $P(x) = x^4 - 3x^3 + x - 3$;
$n = 4$, $a_0 = 1$; $a_1 = -3$; $a_2 = 0$; $a_3 = 1$; $a_4 = -3$;

alegând $\begin{matrix} p_0 = 0 \\ q_0 = 0{,}1 \end{matrix}$, $\varepsilon = 10^{-5} \Rightarrow \begin{matrix} p = -2 \\ q = -3 \end{matrix}$, în 10 iterații $\Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{matrix}$;

apoi (repetă) $\begin{matrix} p_0 = 0 \\ q_0 = 0{,}1 \end{matrix}$, $\varepsilon = 10^{-5} \Rightarrow \begin{matrix} p = -1 \\ q = 1 \end{matrix}$, în 2 iterații

$\Rightarrow \begin{matrix} x_1 = (1 - i\sqrt{3})/2 \\ x_2 = (1 + i\sqrt{3})/2 \end{matrix}$.

17. Factorizarea LR pentru obținerea valorilor proprii ale unei matrice

Prezentarea problemei

Fie $A \in R^{n\times n}$. Ne propunem să determinăm valorile proprii ale matricei date: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Prezentarea metodei

Notăm $A_1 = A$; $A_1 = L_1 \cdot R_1$; $A_2 = R_1 \cdot L_1$; $A_2 = L_2 \cdot R_2$; $A_3 = R_2 \cdot L_2$; ş.a.m.d.

În general $A_k = L_k \cdot R_k$; $A_{k+1} = R_k \cdot L_k$, $k \geq 1$.

Observații:

1) Matricele L_k şi R_k se obțin folosind formulele corespunzătoare factorizării LR – Doolittle (vezi lucrarea de laborator nr. 5 – formulele (5).

2) Matricele A şi A_{k+1} sunt asemenea ($A_{k+1} \sim A$); $A_{k+1} = L^{-1} \cdot A \cdot L$, unde $L = L_1 \cdot L_2 \cdot \ldots \cdot L_k$.

3) $A_{k+1} = R$ – matrice superior triunghiulară şi $\lambda_i = r_{ii}$, $1 \leq i \leq n$.

4) Dacă $y \in R^n$ este un vector propriu corespunzător unei valori proprii λ, pentru matricea R, atunci $x = L \cdot y$ este un vector propriu corespunzător aceleiaşi valori proprii λ, pentru matricea A.

Aplicații

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ are valorile proprii $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, 2, 3.

La prima etapa se obtine:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

şi respectiv

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1/2 & 3 & -1 \\ 1 & 3/2 & 1 & 1 \\ -3/2 & 3/4 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La a doua etapa se obține:

$$L= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ -3/8 & 9/26 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; R = \begin{pmatrix} 4 & -1/2 & 3 & -1 \\ 0 & 13/8 & 1/4 & 5/4 \\ 0 & 0 & -6/13 & -17/13 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

şi respectiv

$$A = \begin{pmatrix} 11/4 & 7/13 & 3 & -1 \\ 5/16 & 89/52 & 1/4 & 5/4 \\ 9/52 & -27/169 & -6/13 & -17/13 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ş.a.m.d.}$$

pentru $\varepsilon = 10^{-4}$, după 17 iterații avem:

2.9999864683
1.6180474534
-6.1803392174E-01
2.0000000000

pentru $\varepsilon = 10^{-6}$, după 24 iterații:

2.9999998204
1.6180341685
-6.1803398883E-01
2.0000000000

18. Metodă iterativă de tip Newton pentru estimarea numerică a valorilor proprii extreme ale unei matrice reale simetrice

Considerând o problemă de forma:

dată o funcție $f : [a;b] \to \mathbf{R}$, continuă, derivabilă, se cere să se determine x* astfel încât:

$$f(x^*) = 0 \quad (1)$$

metoda Newton pentru calculul numeric al soluției exacte x* se poate caracteriza astfel:

alegând $x^{(0)}$ – aproximație inițială pentru x*, se generează şirul de aproximații succesive $x^{(k)}$, k = 1, 2, …, cu ajutorul formulei:

$$x^{(k+1)} = \Gamma(x^{(k)}),\ k = 0, 1, \ldots, \quad (2)$$

unde funcția de iterație Γ(x) este dată prin:

$$\Gamma(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (3)$$

Fie $A \in \mathbf{R}^{nxn}$, matrice simetrică. Notăm cu $P_A(\lambda)$ – polinomul caracteristic al lui A, având expresia analitică:

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda^{n-2} + \ldots + \alpha_n \quad (4)$$

unde $\alpha_j \in R$, $j = \overline{0,n}$; $\alpha_0 = 1$

Funcția de iterație = Γ(x), în cazul polinomului caracteristic $P_A(\lambda)$, pentru $\lambda = \lambda^{(k)}$, unde $\lambda^{(k)}$ nu este una din valorile proprii ale lui A este dată de:

$$\Gamma(\lambda^{(k)}) = \lambda^{(k)} - \frac{\det\left(\lambda^{(k)} I_n - A\right)}{\sum_{j=1}^{n} \det\left(\left(\lambda^{(k)} I_n - A\right)_{jj}\right)} \quad (5)$$

unde I_n reprezintă matricea identitate de ord. n, iar A_{jj} reprezintă matricea obținută din A prin eliminarea liniei j şi coloanei j.

Aplicații

1) Se consideră $A \in R^{3x3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se cere aproximarea valorilor proprii extreme, cu precizia $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-9.}$

Folosind algoritmul prezentat obținem:

λ_{min} = - 0,8793852415 – număr de iterații efectuate: 7.

λ_{max} = 2,5320888862 – număr de iterații efectuate: 6.

19. Aproximarea funcțiilor prin interpolare Lagrange

Prezentarea problemei

Se dau:

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$, cu $x_i \neq x_j$, $i \neq j$ (numite noduri de interpolare);

$y_i = f(x_i)$, $1 \leq i \leq n$ (valorile cunoscute ale unei funcții în nodurile de interpolare);

$z \in \mathbf{R}$, cu $z \in [x_1, x_n]$.

Se cere să se aproximeze f(z), folosind polinomul Lagrange de interpolare pe nodurile date.

Prezentarea metodei

$$f(z) \cong \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{z - x_i}{x_k - x_i}$$

unde

$$L(x) \underset{=\!=}{\text{def}} \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

este polinomul Lagrange de interpolare pe nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Aplicație

Fie	x_i	-1	0	2	3	4
	y_i	-0,3	0,2	0	1,1	1,8

Să se evalueze f(-2) şi f(1), folosind polinomul Lagrange de interpolare pe nodurile date.

Se obține:

f(-2) nu se poate evalua, deoarece $-2 \notin [-1, 4]$

$f(1) \cong -0{,}24$

20. Diferențe divizate pe noduri simple

Prezentarea problemei

Se dau $x_1, x_2, ..., x_n \in R$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$; $y_1, y_2, ..., y_n$ valorile cunoscute ale unei funcții f în $x_1, x_2, ..., x_n$.

- Diferențele divizate de ordinul zero, ale funcției f sunt:

(1) $f\langle x_i \rangle \stackrel{def}{=} y_i$, $1 \leq i \leq n$

- Diferențe divizate de ordin întâi, ale funcției f sunt:

(2) $f\langle x_i, x_{i+1} \rangle \stackrel{def}{=} \dfrac{f\langle x_i \rangle - f\langle x_{i+1} \rangle}{x_i - x_{i+1}}$, $1 \leq i \leq n - 1$

- Diferențe divizate de ordinul al doilea, ale funcției f sunt:

(3) $f\langle x_i, x_{i+1}, x_{i+2} \rangle \stackrel{def}{=} \dfrac{f\langle x_i, x_{i+1} \rangle - f\langle x_{i+1}, x_{i+2} \rangle}{x_i - x_{i+2}}$, $1 \leq i \leq n - 2$

ş. a. m. d.

- Diferența divizată de ordinul n - 1, a funcției f este:

(4) $f\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle \stackrel{def}{=} \dfrac{f\langle x_1, x_2, ..., x_{n-1} \rangle - f\langle x_2, x_3, ..., x_n \rangle}{x_1 - x_n}$

Prezentarea metodei

Se cere tabloul D al diferențelor divizate care în fiecare

coloană j, $0 \leq j \leq n-1$ să conțină diferențele divizate de

ordin j caracterizate prin formulele (1) ÷ (4).

Din (1) $\Rightarrow d_{i0} = y_i$, $1 \leq i \leq n$

Din (2) ÷ (4) $\Rightarrow d_{ij} = \dfrac{d_{i,j-1} - d_{i+1,j-1}}{x_i - x_{i+j}}$, $1 \leq j \leq n-1$, $1 \leq i \leq n-j$.

Aplicație

Se dau:

x_i	-1	0	2	3	4
y_i	-0,3	0,2	0	1,1	1,8

Se obțin:

- diferențele divizate de ordinul 0 sunt –0,3; 0,2; 0; 1,1; 1,8.
- diferențele divizate de ordinul 1 sunt: 0,5; -0,1; 1,1; 0,7;
- diferențele divizate de ordinul 2 sunt: –0,2; 0,4; -0,2;
- diferențele divizate de ordinul 3 sunt: 0,15; - 0,15 şi
- diferența divizată de ordinul 4 este – 0,06.

21. Aproximarea funcțiilor prin interpolare Newton

Prezentarea problemei

Se dau:

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$, cu $x_i \neq x_j$, $i \neq j$ (numite noduri de interpolare);

$y_i = f(x_i)$, $1 \leq i \leq n$ (valorile cunoscute ale unei funcții în nodurile de interpolare);

$z \in R$, cu $z \in [x_1, x_n]$.

Se cere să se aproximeze f(z), folosind polinomul Newton de interpolare pe nodurile date.

Prezentarea metodei

$$f(z) \cong f\langle x_1 \rangle + \sum_{k=2}^{n} f\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle \cdot \prod_{i=1}^{k-1} (z - x_i)$$

unde

$$N(x) \underline{\underline{def}}\ f\langle x_1 \rangle + \sum_{k=2}^{n} f\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle \cdot \prod_{i=1}^{k-1} (x - x_i)$$

este polinomul Newton de interpolare pe nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

şi

$$f\langle x_1 \rangle = y_1$$

$$f\langle x_1, x_1, \ldots, x_k \rangle = \sum_{j=1}^{k} \frac{y_j}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} (x_j - x_i)}, \quad 2 \leq k \leq n$$

Aplicație

Fie $\quad x_i$	-1	0	2	3	4
y_i	-0,3	0,2	0	1,1	1,8

Să se evalueze f(-2) şi f(1), folosind polinomul Newton de interpolare pe nodurile date.

Se obține:

f(-2) nu se poate evalua, deoarece $-2 \notin [-1, 4]$; $f(1) \cong -0,24$

22. Diferențe divizate pe noduri multiple

Prezentarea problemei

Se dau $x_1, x_2, ..., x_n \in R$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, noduri multiple, cu multiplicitățile $m_i \in N^*$, $1 \le i \le n$ şi valorile:

(*) $f_i^{(j)}$, $1 \le i \le n$, $0 \le j \le m_i - 1$

cunoscute în noduri pentru o funcție f şi o parte din derivatele sale.

Prezentarea metodei

Considerăm $s = \sum_{k=1}^{n} m_k$

- Diferențele divizate de ordinul zero, ale funcției f sunt:

(1) $f\langle x_i \rangle \overset{def}{=} f_i^{(0)}$, $1 \le i \le n$

- Diferențe divizate de ordin întâi, ale funcției f sunt:

(2) $f\langle x_i, x_i \rangle = f_i^{(1)}/1!$, $1 \le i \le n$

sau

(2’)$f\langle x_i, x_{i+1} \rangle \overset{def}{=} \dfrac{f\langle x_i \rangle - f\langle x_{i+1} \rangle}{x_i - x_{i+1}}$, $1 \le i \le n - 1$

- Diferențe divizate de ordinul al doilea, ale funcției f sunt:

(3) $f\langle x_i, x_i \rangle = f_i^{(1)} / 1!$, $1 \le i \le n$

sau

$$(3') \begin{cases} f\langle x_i, x_i, x_{i+1} \rangle \overset{def}{=} \dfrac{f\langle x_i, x_i \rangle - f\langle x_i, x_{i+1} \rangle}{x_i - x_{i+1}} \\ \text{respectiv,} \\ f\langle x_i, x_{i+1}, x_{i+1} \rangle \overset{def}{=} \dfrac{f\langle x_i, x_{i+1} \rangle - f\langle x_{i+1}, x_{i+1} \rangle}{x_i - x_{i+1}} \end{cases}, \quad 1 \le i \le n - 1$$

sau

$$(3'') \quad f\langle x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\rangle \overset{def}{=} \frac{f\langle x_i, x_{i+1}\rangle - f\langle x_{i+1}, x_{i+2}\rangle}{x_i - x_{i+2}},$$

$1 \le i \le n-2$ ş. a. m. d.

- Diferenţa divizată de ordinul s - 1, a funcţiei f este:

$$(4) \quad f < \underbrace{x_1, x_1, ..., x_1}_{m_1-ori}, \underbrace{x_2, x_2, ..., x_2}_{m_2-ori}, ..., \underbrace{x_n, x_n, ..., x_n}_{m_n-ori} > \overset{def}{=}$$

$$\overset{def}{=} \frac{f < \underbrace{x_1, x_1, ..., x_1}_{m_1-ori}, ..., \underbrace{x_n, x_n, ..., x_n}_{(m_n-1)-ori} > - f < \underbrace{x_1, x_1, ..., x_1}_{(m_1-1)-ori}, ..., \underbrace{x_n, x_n, ..., x_n}_{m_n-ori} >}{x_1 - x_n}$$

În general, diferenţele divizate care apar sunt de tipul:

$$(5) \quad f < \underbrace{x_i, x_i, ... x_i}_{p-ori} > = \frac{f^{(p-1)}(x_i)}{(p-1)!}, \ 1 \le i \le n, \ 1 \le p \le m_i$$

sau

$$(6) \quad f < \underbrace{x_i, x_i, ..., x_i}_{p-ori}, ..., \underbrace{x_j, x_j, ..., x_j}_{q-ori} > =$$

$$= (f < \underbrace{x_i, x_i, ..., x_i}_{p-ori}, ..., \underbrace{x_j, x_j, ..., x_j}_{(q\text{-}1)-ori} > -$$

$$- f < \underbrace{x_i, x_i, ..., x_i}_{(p\text{-}1)-ori}, ..., \underbrace{x_j, x_j, ..., x_j}_{q-ori} >) / (x_i - x_j), \ 1 \le i \le n, \ 1 \le p \le$$

m_i, $1 \le j \le n$, $1 \le q \le m_j$, $i \ne j$.

Se cere tabloul D al diferenţelor divizate care în fiecare coloană j, $0 \le j \le s-1$ să conţină diferenţele divizate de ordinul j caracterizate prin formulele (1) ÷ (6). Notăm elementele tabloului cu d_{ij}, $0 \le j \le s-1$, $1 \le i \le s-j$.

Aplicație

Se dau:

x_i	-2	0	2
f_i	1	-2	-1
f_i'	-4	2	3
f_i''	0	-	0

Deci, $m_1 = 3$; $m_2 = 2$; $m_3 = 3 \Rightarrow s = 8$.

Se obține tabloul:

- diferențele divizate de ordinul 0 sunt: 1; 1; 1; -2; -2; -1; -1; -1;
- diferențele divizate de ordinul 1 sunt: -4; -4; -1,5; 2; 0,5; 3; 3;
- diferențele divizate de ordinul 2 sunt: 0; 1,25; 1,75; -0,75; 1,25; 0;
- diferențele divizate de ordinul 3 sunt: 0,625; 0,25; -0,625; 1; -0,625;
- diferențele divizate de ordinul 4 sunt: -0,1875; -0,21875; 0,40625; -0,8125;
- diferențele divizate de ordinul 5 sunt: -0,0078125; 0,15625; -0,3046875;
- diferențele divizate de ordinul 6 sunt: 0,041015625; 0,115234375;
- diferența divizată de ordinul 7 este: -0,0390625.

23. Polinom de interpolare Hermite

Prezentarea problemei

Se dau $x_1, x_2, ..., x_n \in R$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, noduri multiple, cu multiplicitățile $m_i \in N^*$, $1 \leq i \leq n$ şi valorile $f_i^{(j)}$, $1 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m_i-1$ cunoscute în noduri pentru o funcție f şi o parte din derivatele sale.

Se cere determinarea unui polinom H a cărui valori în punctele x_i să coincidă cu valorile funcției f, adică:
$H(x_i) = f(x_i)$, pentru $1 \leq i \leq n$ şi în plus valorile derivatei polinomului H să coincidă cu valorile derivatei funcției până la ordinul m_i-1 pentru fiecare valoare x_i.

Pentru valori $z \neq x_i$, valoarea polinomului H(z) aproximează valoarea funcției f(z).

Prezentarea metodei

Pentru construcția polinomului H propunem formula Hermite.

Pentru $z \in [x_1, z_n]$, se cere:

$$H(z) = f\langle x_1 \rangle + f\langle x_1 x_1 \rangle (z - x_1) + ... + f < \underbrace{x_1, x_1, ..., x_1}_{m_1-\text{ori}} > \cdot$$

$$\cdot\ (z - x_1)^{m_1-1} + f < \underbrace{x_1, x_1, ..., x_1}_{m_1-\text{ori}}, x_2 > \cdot\ (z - x_1)^{m_1} + ... +$$

$$+ f < \underbrace{x_1, x_1, ..., x_1}_{m_1-\text{ori}}, \underbrace{x_{21}, x_2, ..., x_2}_{m_2-\text{ori}}, ..., \underbrace{x_n, x_n, ..., x_n}_{m_n-\text{ori}} > \cdot$$

$$\cdot (z - x_1)^{m_1} (z - x_2)^{m_2} ... (z - x_n)^{m_n-1},$$

unde diferențele divizate pe noduri multiple sunt elementele tabloului D din algoritmul precedent.

24. Aproximarea funcțiilor prin spline cubic cu derivata a doua nulă la extremitățile intervalului de aproximare

Prezentarea problemei

Se dau $x_0, x_1, ..., x_n \in R$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, noduri de interpolare; $f_0, f_1, ..., f_n \in R$ valorile cunoscute în x_i, $0 \leq 1 \leq n$, ale unei funcții f şi trebuie să obținem funcția S cu proprietățile $S\big|_{[x_{i-1},x_i]} \overset{not}{=} S_i$, $1 \leq i \leq n$ este polinom de gradul 3; $S(x_i) = f_i$, $0 \leq i \leq n$; S, S', S'' continue pe $[x_0,x_n]$.

Prezentarea metodei

Notăm $h_i = x_i - x_{i-1}$, $1 \leq i \leq n$ şi avem:

$$(1)\quad S_i(x) = \frac{u_i(x - x_{i-1})^3 + u_{i-1}(x_i - x)^3}{6h_i} + \left(f_i - u_i \cdot \frac{h_i^{\,2}}{6}\right)\frac{x - x_{i-1}}{h_i} + \left(f_{i-1} - u_{i-1} \cdot \frac{h_i^{\,2}}{6}\right)\frac{x_i - x}{h_i},\ 1 \leq i \leq n,\ x \in [x_{i-1}, x_i]$$

unde, am notat $S''(x_i) = u_i$, $0 \leq i \leq n$

Avem $S''(x_0) = S''(x_n) = 0 \Rightarrow u_0 = u_n = 0$.

Pentru a obține spline-ul cubic S, avem nevoie de restricțiile sale, S_i pe fiecare interval unde: $u_1, u_2, ..., u_{n-1}$ sunt necunoscute, determinate ca soluție a sistemului:

$$(2)\quad \frac{h_i}{6}u_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}u_i + \frac{h_{i+1}}{6}u_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i},$$

$1 \leq i \leq n-1$, cu $u_0 = u_n = 0$.

Matricea sistemului (2) este tridiagonală – simetrică şi are următoarele elemente:

(3)

$$\begin{cases} a_i = (h_i + h_{i+1})/3,\ 1 \le i \le n-1 \text{ - pe diagonala principală} \\ b_i = h_{i+1}/6,\ 1 \le i \le n-2 \text{ - deasupra diagonalei principale} \\ c_i = h_{i+1}/6,\ 1 \le i \le n-2 \text{ - sub diagonala principală} \end{cases}$$

iar termenul liber al sistemului (2) are componentele:

(4) $t_i = (f_{i+1} - f_i)/h_{i+1} - (f_i - f_{i-1})/h_i,\ 1 \le i \le n-1.$

Pentru rezolvarea sistemului (2), folosim factorizarea LR pentru matrice tridiagonale şi înlocuind $u_1, u_2, ..., u_{n-1}$, astfel obținute, în (1), găsim S.

Aplicație

Se dă tabelul:

x_i	-1	0	1	2
f_i	5	1	1	11

Avem: $h_1 = h_2 = h_3 = 1$; $u_0 = u_3 = 0$.
Se obține sistemul:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 60 \end{pmatrix}$$

cu soluția: $u_1 = 2,4$ şi $u_2 = 14,4$.

25. Aproximarea funcțiilor prin spline cubic cu prima derivată egală cu prima derivată a funcției la extremitățile intervalului de aproximare

Prezentarea problemei

Se dau $x_0, x_1, ..., x_n \in R$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, noduri de interpolare; $f_0, f_1, ..., f_n \in R$ valorile cunoscute în x_i, $0 \leq 1 \leq n$, ale unei funcții f; f_0', f_n', valorile $f'(x_0)$ şi $f'(x_n)$.

Trebuie să obținem funcția S cu proprietățile $S\big|_{[x_{i-1},x_i]} \overset{not}{=} S_i$, $1 \leq i \leq n$ este polinom de gradul 3; $S(x_i) = f_i$, $0 \leq i \leq n$; $S'(x_i) = f_i'$, $i = 0$, $i = n$; S, S', S'' continue pe $[x_0,x_n]$.

Prezentarea metodei

Notăm $h_i = x_i - x_{i-1}$, $1 \leq i \leq n$ şi avem:

$$(1)\, S_i(x) = \frac{u_i(x - x_{i-1})^3 + u_{i-1}(x_i - x)^3}{6h_i} + \left(f_i - u_i \cdot \frac{h_i^{\ 2}}{6}\right)\frac{x - x_{i-1}}{h_i} +$$

$$+\left(f_{i-1} - u_{i-1} \cdot \frac{h_i^{\ 2}}{6}\right)\frac{x_i - x}{h_i},\ 1 \leq i \leq n,\ x \in [x_{i-1}, x_i],$$

unde, am notat $S''(x_i) = u_i$, $0 \leq i \leq n$.

Pentru a obține spline-ul cubic S, avem nevoie de obținerea restricției sale S_i pe fiecare interval unde: $u_0, u_1, ..., u_n$ sunt necunoscute, determinate ca soluție a sistemului:

(2)

$$\begin{cases} \dfrac{h_1}{3}u_0 + \dfrac{h_1}{6}u_1 = \dfrac{f_1 - f_0}{h_1} - f_0{}' \\ \dfrac{h_i}{6}u_{i-1} + \dfrac{h_i + h_{i+1}}{3}u_i + \dfrac{h_{i+1}}{6}u_{i+1} = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \dfrac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, 1 \le i \le n- \\ \dfrac{h_n}{6}u_{n-1} + \dfrac{h_n}{3}u_n = f_n{}' - \dfrac{f_n - f_{n-1}}{h_n} \end{cases}$$

1.

Matricea sistemului (2) este tridiagonală, simetrică şi are elementele pe diagonala principală, deasupra diagonalei principale şi respectiv sub diagonala principală, date de relaţiile:

$$(3)\ \begin{cases} a_0 = h_1/3, a_i = (h_i + h_{i+1})/3, 1 \le i \le n-1; a_n = h_n/3, \\ b_i = h_{i+1}/6, 0 \le i \le n-1, \\ c_i = h_{i+1}/6, 0 \le i \le n-1, \end{cases}$$

iar termenul liber are componentele:

$$(4) \begin{cases} t_0 = (f_1 - f_0)/h_1 - f_0{}' \\ t_i = (f_{i+1} - f_i)/h_{i+1} - (f_i - f_{i-1})/h_i,\ 1 \le i \le n-1 \\ t_n = f_n{}' - (f_n - f_{n-1})/h_n \end{cases}$$

Aplicație

Se dă tabelul:

x_i	-1	0	1	2
f_i	-12	2	-6	-36
f_i'	19	-	-	-35

Avem: $h_1 = h_2 = h_3 = 1$.

Se obține sistemul:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -132 \\ -132 \\ -30 \end{pmatrix}$$

cu soluția: $u_0 = -2$, $u_1 = -26$, $u_2 = -26$, $u_3 = -2$.

26. Metoda celor mai mici pătrate pentru aproximarea funcțiilor – cazul discret

Prezentarea problemei

Se dau $x_1, x_2, ..., x_m \in \mathbf{R}$; $f_1, f_2, ..., f_m \in \mathbf{R}$ (reprezintă valori cunoscute în x_i, $1 \leq i \leq m$, pentru o funcție f); $w_1, w_2, ..., w_m \in \mathbf{R}_+$ (reprezintă ponderi) şi se cere:

(1) $$p_0(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)$$

elementul de cea mai bună aproximare pentru f, în sensul celor mai mici pătrate, unde: n este dat, iar:

(2) $$\begin{cases} \varphi_0(x) = 1, & (\forall) x \in R \\ \varphi_k(x) = x^k, & (\forall) x \in R,\ 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

Prezentarea metodei

Notăm:

(3) $$\widetilde{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \\ f_m \end{pmatrix};\ \widetilde{\varphi}_0 = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_1) \\ \varphi_0(x_2) \\ \ldots \\ \varphi_0(x_m) \end{pmatrix};\ \widetilde{\varphi}_k = \begin{pmatrix} \varphi_k(x_1) \\ \varphi_k(x_2) \\ \ldots \\ \varphi_k(x_m) \end{pmatrix},\ 1 \leq k \leq n.$$

Pentru u, v $\in R^m$, definim produsul scalar:

(4) $$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^{m} w_k \cdot u_k \cdot v_k$$

Pentru a obține coeficienții $a_0, a_1, ..., a_n$ ai lui p_0 din (1), se rezolvă sistemul:

(5)

$$\begin{pmatrix} \langle\tilde{\varphi}_0,\tilde{\varphi}_0\rangle & \langle\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_0\rangle & \cdots & \langle\tilde{\varphi}_n,\tilde{\varphi}_0\rangle \\ \langle\tilde{\varphi}_0,\tilde{\varphi}_1\rangle & \langle\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_1\rangle & \cdots & \langle\tilde{\varphi}_n,\tilde{\varphi}_1\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle\tilde{\varphi}_0,\tilde{\varphi}_n\rangle & \langle\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_n\rangle & \cdots & \langle\tilde{\varphi}_n,\tilde{\varphi}_n\rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f,\tilde{\varphi}_0\rangle \\ \langle f,\tilde{\varphi}_1\rangle \\ \cdots \\ \langle f,\tilde{\varphi}_n\rangle \end{pmatrix}.$$

De asemenea, considerăm o coloană în plus în matricea B, coloana n+1 care conține termenii liberi ai sistemului (5). Folosind (2), (3), (4), calculăm elementele matricei B cu formulele:

$$(6) \quad \begin{cases} b_{00} = \sum_{k=1}^{m} w_k;\ b_{0j} = b_{j0} = \sum_{k=1}^{m} w_k \cdot x_k^j,\ 1 \le j \le n \\ b_{ij} = b_{ji} = \sum_{k=1}^{m} w_k \cdot x_k^{i+j},\ 1 \le i \le n,\ i \le j \le n \\ b_{0,n+1} = \sum_{k=1}^{m} w_k \cdot f_k;\ b_{i,n+1} = \sum_{k=1}^{m} w_k \cdot f_k \cdot x_k^i,\ 1 \le i \le n \end{cases}$$

Aplicație

Se dă tabelul:

x_i	1	2	4	6
f_i	10	5	2	1
w_i	1	1	1	1

Să se aproximeze **parabolic** funcția de mai sus.
Avem: $m = 4$, $n = 2$, $p_0(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.
Se obține sistemul:

$$\begin{pmatrix} 4 & 13 & 57 \\ 13 & 57 & 289 \\ 57 & 289 & 1569 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 34 \\ 98 \end{pmatrix}$$

cu soluția:

$a_0 \cong 14.311557789$,
$a_1 \cong -5.2663316585$,
$a_2 \cong 0.5125628141$.

27. Metoda trapezului pentru evaluarea integralelor

Prezentarea problemei

Fiind dată integrala definită: $\int_a^b f(x)dx$ ne propunem stabilirea unei formule care să aproximeze valoarea integralei.

Prezentarea metodei

Fie $[a, b] \subset R$ şi
$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, o diviziune a lui [a,b]
cu $x_i = x_0 + ih$, $0 \le i \le n$, $h = \frac{b-a}{n}$.
Metoda trapezului, propune următoarea aproximare pentru integrala definită:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right].$$

Aplicaţie

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x+1}$$

pentru $\varepsilon = 10^{-5}$ $\Rightarrow$ $I \cong 0,69314813423$, în 9 paşi
pentru $\varepsilon = 10^{-8}$ $\Rightarrow$ $I \cong 0,69314718146$, în 14 paşi
pentru $\varepsilon = 10^{-9}$ $\Rightarrow$ $I \cong 0,69314718083$, în 15 paşi

Valoarea exactă $I = \ln 2 \cong 0,69314718056$

28. Metoda Simpson pentru evaluarea integralelor

Prezentarea problemei

Fiind dată integrala definită: $\int_a^b f(x)dx$ ne propunem stabilirea unei formule care să aproximeze valoarea integralei.

Prezentarea metodei

Fie $[a, b] \subset R$ şi
$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, o diviziune a lui [a,b]
cu $x_i = x_0 + ih$, $0 \le i \le n$, $h = \frac{b-a}{n}$.
Metoda Simpson, propune următoarea aproximare pentru evaluarea integralei:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{6}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(b)\right].$$

Aplicație

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x+1}$$

pentru $\varepsilon = 10^{-5}$ $\Rightarrow$ $I \cong 0{,}69314765282$, în 4 paşi
pentru $\varepsilon = 10^{-8}$ $\Rightarrow$ $I \cong 0{,}69314718067$, în 7 paşi
pentru $\varepsilon = 10^{-10}$ $\Rightarrow$ $I \cong 0{,}69314718056$, în 9 paşi

29. Metoda Newton pentru evaluarea integralelor

Prezentarea problemei

Fiind dată integrala definită: $\int_a^b f(x)dx$ ne propunem stabilirea unei formule care să aproximeze valoarea integralei.

Prezentarea metodei

Fie $[a, b] \subset R$ şi
$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, o diviziune a lui [a,b]
cu $x_i = x_0 + ih,\ 0 \le i \le n,\ h = \dfrac{b-a}{n}$.

Metoda Newton, propune următoarea aproximare pentru evaluarea integralei:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 3\sum_{i=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{2x_i + x_{i+1}}{3}\right) + f\left(\frac{x_i + 2x_{i+1}}{3}\right)\right) + f(b)\right]$$

Aplicație

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x+1}$$

pentru $\varepsilon = 10^{-5} \Rightarrow I \cong 0{,}69314739068$, în 4 paşi
pentru $\varepsilon = 10^{-8} \Rightarrow I \cong 0{,}69314718061$, în 7 paşi
pentru $\varepsilon = 10^{-10} \Rightarrow I \cong 0{,}69314718056$, în 8 paşi

30. Evaluarea numerică a integralelor duble pe domenii convexe de frontieră poligonală

Considerăm integrala dublă $\iint_D f(x,y)dxdy$, unde $D \subset R^2$ este un domeniu conex de frontieră poligonală.

I. Presupunem că D este un domeniu triunghiular de vârfuri $V_1(x_1,y_1)$, $V_2(x_2,y_2)$, $V_3(x_3,y_3)$. $\iint_D f(x,y)dxdy$ poate fi aproximată numeric folosind una din următoarele formule:

(1) $\iint_D f(x,y)dxdy = \frac{S}{3}(f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2) + f(x_3,y_3))$, unde S reprezintă aria domeniului D (formulă având ordinul de exactitate unu).

(2) $\iint_D f(x,y)dxdy = \frac{S}{12}(f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2) + f(x_3,y_3) + 9f(x_G,y_G))$, unde S reprezintă aria domeniului D iar $G(x_G,y_G)$ centrul de greutate al lui D (formulă având ordinul de exactitate doi).

(3) $\iint_D f(x,y)dxdy = \frac{S}{60}\left[8\left(f\left(x_1^{/},y_1^{/}\right)+f\left(x_2^{/},y_2^{/}\right)+f\left(x_3^{/},y_3^{/}\right)\right)+\right.$ $\left.+3\left(f\left(x_1,y_1\right)+f\left(x_2,y_2\right)+f\left(x_3,y_3\right)+27f\left(x_G,y_G\right)\right]\right.$, unde S reprezintă aria domeniului D, $G(x_G,y_G)$ centrul de greutate al lui D, iar $V_1^{/}(x_1^{/},y_1^{/})$, $V_2^{/}(x_2^{/},y_2^{/})$, $V_3^{/}(x_3^{/},y_3^{/})$ mijloacele laturilor opuse vârfurilor V_1, V_2, V_3 respectiv (formulă având ordinul de exactitate trei).

II. Presupunem că D este un domeniu convex de frontieră poligonală. Introducem pe domeniul D o triangularizare T, dată de $T = \bigcup_{i=1}^{NE} K_i$, unde K_i – triunghi de vârfuri $V_1^i(x_1^i,y_1^i)$;

$V_2^i(x_2^i, y_2^i)$; $V_3^i(x_3^i, y_3^i)$, $i = \overline{1, NE}$, iar NE – numărul total de elemente triunghiulare ale lui T.

Astfel, obținem:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{NE} \iint_{K_i} f(x,y)dxdy$$

Evaluând numeric fiecare integrală dublă definită pe câte un domeniu triunghiular K_i, $i = \overline{1, NE}$, conform formulelor de la cazul I, obținem prin sumarea rezultatelor valoarea aproximativă a integralei duble $\iint_D f(x,y)dxdy$ inițial dată.

Aplicație. Caz I

$\iint_D \sqrt{xy - y^2}\,dxdy$, unde D – triunghiul de vârfuri $V_1(0,0)$; $V_2(10,1)$; $V_3(1,1)$.

Aplicând formula (1) obținem:

$$\iint_D \sqrt{xy - y^2}\,dxdy = 4{,}495$$

Aplicație. Caz II

$\iint_D \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}(1+xy)}dxdy$, unde D = $\{(x,y) | x \in [1;3]; y \in [0;1]\}$.

Observație: Valoarea exactă este: 0,496233.

31. Metoda Euler pentru rezolvarea unei probleme Cauchy asociată unei ecuații diferențiale ordinare

Prezentarea problemei

Fie problema Cauchy:

$$(1)\ \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Prezentarea metodei

Se consideră $[x_0, x_n] \subset R$, unde:

$x_{i+1} = x_i + h$, $0 \le i \le n-1$

şi se cer valorile aproximative ale soluției problemei (1), notate y_i, unde $y_i \cong y(x_i)$, $1 \le i \le n$.

Formulele folosite sunt:

$$(2)\ \begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ \text{cu } 0 \le i \le n-1 \end{cases}$$

Aplicație

Fie problema (1) $\begin{cases} y' = \dfrac{2y}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

Se consideră [1; 1,5] cu $x_i = 1 + 0,1 \cdot i$, $0 \le i \le 5$. Se cer valorile y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 care aproximează y(1,1); y(1,2); y(1,3); y(1,4); y(1,5).

Astfel, pentru aceste valori, obținem aproximările:

1,2099570480

1,4399062866

1,6898477157, în 8 „ îmbunătățiri” pentru $\varepsilon = 10^{-4}$

1,9597813354

2,2497071456
1,2099973144
1,4399941404
1,6899904782, în 13 „ îmbunătățiri” pentru $\varepsilon = 10^{-9}$
1,9599863276
2,2499816888
Valorile exacte ale soluției $y = x^2$ sunt:
1,21; 1,44; 1,69; 1,96; 2,25.

32. Metoda Runge-Kutta de ordinul doi pentru rezolvarea unei probleme Cauchy asociată unei ecuații diferențiale ordinare

Prezentarea problemei

Fie problema Cauchy:

$$(1)\quad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Prezentarea metodei

Se consideră $[x_0, x_n] \subset R$, unde:

$x_{i+1} = x_i + h$, $0 \le i \le n-1$

şi se cer valorile aproximative ale soluției problemei (1), notate y_i, unde $y_i \cong y(x_i)$, $1 \le i \le n$.

Formulele folosite sunt:

$$(2)\quad \begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + (k_1 + 3k_2)/4, \text{unde} \\ \qquad k_1 = hf(x_i, y_i) \\ \qquad k_2 = hf(x_i + 2h/3, y_i + 2k_1/3) \\ \text{cu } \ 0 \le i \le n-1 \end{cases}$$

Aplicație

Fie problema (1) $\begin{cases} y' = \dfrac{2y}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

Se consideră $[1; 1{,}5]$ cu $x_i = 1 + 0,\ 1 \cdot i$, $0 \le i \le 5$.

Se cer valorile y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 care aproximează y(1,1); y(1,2); y(1,3); y(1,4); y(1,5).

Astfel, pentru aceste valori, obținem aproximările:

1,2099972846
1,4399943092
1,6899910738, în 5 „ îmbunătățiri” pentru $\varepsilon = 10^{-5}$
1,9599875787
2,2499838240

sau:

1,2099999998
1,4399999996
1,6899999993, în 13 „ îmbunătățiri” pentru $\varepsilon = 10^{-8}$
1,9599999991
2,2499999987

Valorile exacte ale soluției $y = x^2$ sunt:
1,21; 1,44; 1,69; 1,96; 2,25.

33. Metoda Euler pentru rezolvarea unei probleme Cauchy asociată unui sistem de două ecuații diferențiale ordinare

Prezentarea problemei

Fie problema Cauchy:

$$(1) \quad \begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \\ y(x_0) = y_0 \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$$

Se cere să se aproximeze soluția problemei date pe $[x_0, x_n]$.

Prezentarea metodei

Se consideră $[x_0, x_n] \subset R$, cu diviziunea de pas h:

$x_{i+1} = x_i + h, \quad 0 \le i \le n-1$

şi se cer valorile aproximative ale soluției problemei (1), notate y_i, respectiv z_i, unde $y_i \cong y(x_i)$, $z_i \cong z(x_i)$, $1 \le i \le n$.

Formulele folosite sunt:

$$(2) \quad \begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i, z_i) \\ z_{i+1} = z_i + hg(x_i, y_i, z_i) \\ \text{cu } 0 \le i \le n-1 \end{cases}$$

Aplicație

Fie problema (1) $\begin{cases} y' = x / y \\ z' = z(x^2 + y^2)/(xy^2) \\ y(1) = 1 \\ z(1) = 1 \end{cases}$

Se consideră intervalul [1; 1,5] cu diviziunea x_i = 1+0,1i, $0 \leq i \leq 5$. Se cer valorile y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, respectiv z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, care aproximează y(1,1); y(1,2); y(1,3); y(1,4); y(1,5) zespectiv z(1,1); z(1,2); z(1,3); z(1,4); z(1,5).

Astfel, pentru aceste valori obținem aproximările:

1,1000000015 şi 1,2099919436
1,2000000030 şi 1,4399824221
1,3000000045 şi 1,6899714354, în 12 „îmbunătățiri“,
1,4000000060 şi 1,9599589836 pentru $\varepsilon = 10^{-4}$
1,5000000075 şi 2,2499450664

Soluția exacta este $\begin{cases} y(x) = x \\ z(x) = x^2 \end{cases}$